Série 3b Questions

Exercise 3b.1 – Thermal effect

Considérer la barre axiale de section transversale carrée de la figure 3b.1. Le coefficient de dilatation thermique du matériau est $\alpha = 10 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$ et son module de Young est de 40 GPa. La température initiale est la température ambiante (25 °C). La charge de traction est de 480 N.

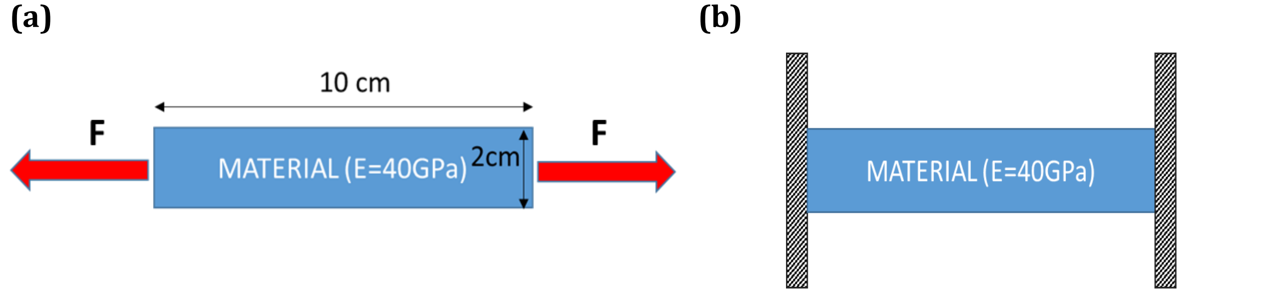

Figure 3b.1 | (a) Loaded bar, (b) Clamped bar.

- Nous plaçons la barre dans un four à 500 °C (Figure 3b.1.a).
(a) Déterminer l'allongement longitudinal total.
(b) Déterminer la densité d'énergie de déformation de la barre.
- Toujours dans le four, nous fixons la barre par ses extrémités longitudinales (Figure 3b.1.b), puis nous la sortons du four et la mettons dans de l'azote liquide (-200°C).
NB- ***Elle n'est plus soumise à la charge externe F.***
(c) Déterminer la valeur de la contrainte induite par la température dans la barre.

Exercise 3b.1 - Text in English

Consider the squared cross-section axial bar of Figure 3b.1. The thermal expansion coefficient of the material is $\alpha = 10 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$ and its Young modulus is 40 GPa. The initial temperature is room temperature (25°C). The tensile load is 480 N.

- **We put the bar in a 500°C furnace (Figure 3b.1.a).**
  (a) Determine the total longitudinal elongation .
  (b) Determine the strain energy density of the bar.
- **Still in the furnace, we clamp the bar on its longitudinal ends (Figure 3b.1.b) and, from the furnace, put it in liquid Nitrogen (-200°C).**
  NB- It is not anymore submitted to the external load F.
  (c) Determine the value of the induced stress due to temperature in the bar.

Exercise 3b.2 – Plane stress

Une plaque carrée de largeur b et d'épaisseur t est soumise aux forces normales F_x et F_y, et aux forces de cisaillement V, comme le montre la figure 3b.2. Ces forces produisent des contraintes uniformément réparties agissant sur les faces latérales de la plaque. **Calculer la variation du volume $\Delta V = V_{final} - V_{initial}$ de la plaque et de l'énergie de déformation U stockée dans la plaque** si les dimensions sont b=600 mm et t=40 mm, la plaque est en magnésium ($E = 45\ GPa, \nu = 0.35$), et les forces sont $F_x = 480\ kN$, $F_y = 180\ kN$, et $V = 120\ kN$.

Formule pour la densité d'énergie de déformation en 2D:

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right)$$

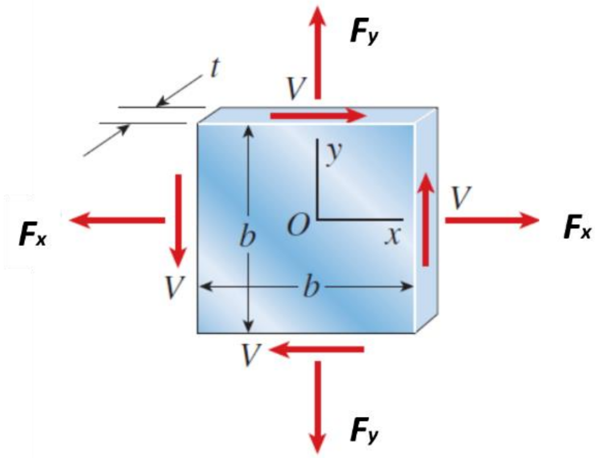

Figure 3b.2| Loads on a cube

Exercise 3b.2 - Text in English

A square plate of width b and thickness t is loaded by normal forces F_x and F_y, and by shear forces V, as shown in Figure 3b.2. These forces produce uniformly distributed stresses acting on the side faces of the plate. **Calculate the change in the volume $\Delta V = V_{final} - V_{initial}$ of the plate and strain energy U stored in the plate** if the dimensions are $b = 600\ mm$ and $t = 40\ mm$, the plate is made of magnesium with $E = 45\ GPa$ and $\nu = 0.35$, and the forces are $F_x = 480\ kN$, $F_y = 180\ kN$, and $V = 120\ kN$.

Formula for strain energy density in two dimensions.

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right)$$

Exercise 3b.3 – Hybrid stiffness – 3D structure

Un bloc de caoutchouc (R sur la figure 3b.3) est confiné dans une fente à l'intérieur d'un bloc d'acier (S sur la figure 3b.3). Une pression uniforme p_0 appliquée sur le dessus du bloc de caoutchouc induit une déformation. Le module de Young E du caoutchouc et le coefficient de Poisson ν du caoutchouc sont connus. *Valeurs numériques:* $p_0 = 5.0\ MPa$; $E = 15.0\ GPa$; $\nu = 0.50$

a) Dériver une formule pour la pression induite par p_0 le long de l'axe x sur le bloc et calculer sa valeur -
- **NB – Nous négligerons les effets de friction**

b) Dériver une formule pour la variation relative du volume du caoutchouc et calculer sa valeur -

c) Trouver la densité d'énergie de déformation relative u_0 du caoutchouc.

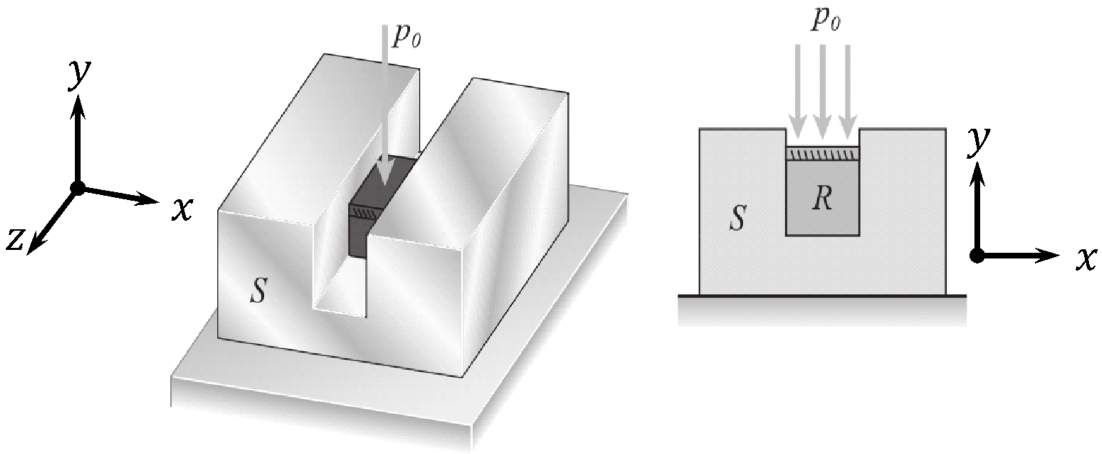

Figure 3b.3| Block of rubber in a steel block

Exercise 3b.3 - Text in English

A block of rubber (R on Figure 3b.3) is confined in a slot inside a steel block (S on Figure 3b.3). A uniform pressure p_0 applied on the top of the rubber block induces a deformation. The rubber's Young's modulus E and the rubber's Poisson's ratio ν are known. *Numerical values:* $p_0 = 5.0\ MPa$; $E = 15.0\ GPa$; $\nu = 0.50$

a) Give an expression for the pressure along x axis on the block induced by p_0 and calculate its value
- **NB – We will neglect friction effects**

b) Give an expression for the relative volume variation of the rubber and calculate its value

c) Find the strain-energy density u_0 of the rubber

Exercise 3b.4 – Bars and spring in series

Un système 1) est composé de deux barres différentes alors qu'un système similaire 2) est formé d'un ressort et d'une barre, comme le montre la figure 3b.4. Pour les deux systèmes, des forces sont appliquées en A, B et C et les matériaux sont considérés comme isotropes.

a) Dessiner le diagramme du corps libre pour les deux systèmes.

Les valeurs numériques pour chaque système sont les suivantes :

1) $A = 3\ cm^2, A_* = 2\ cm^2, E = 25\ GPa, L = 10\ cm, F_1 = 30\ kN, F_2 = 45\ kN, F_3 = 75kN$

2) $A = 3\ cm^2, E = 25\ GPa, L = 10\ cm, F_1 = 30\ kN, F_2 = 45\ kN, F_3 = 75kN, k_s = 1 \cdot 10^8 \frac{kg}{s^2}$

b) Calculer la déformation totale pour les deux systèmes différents .

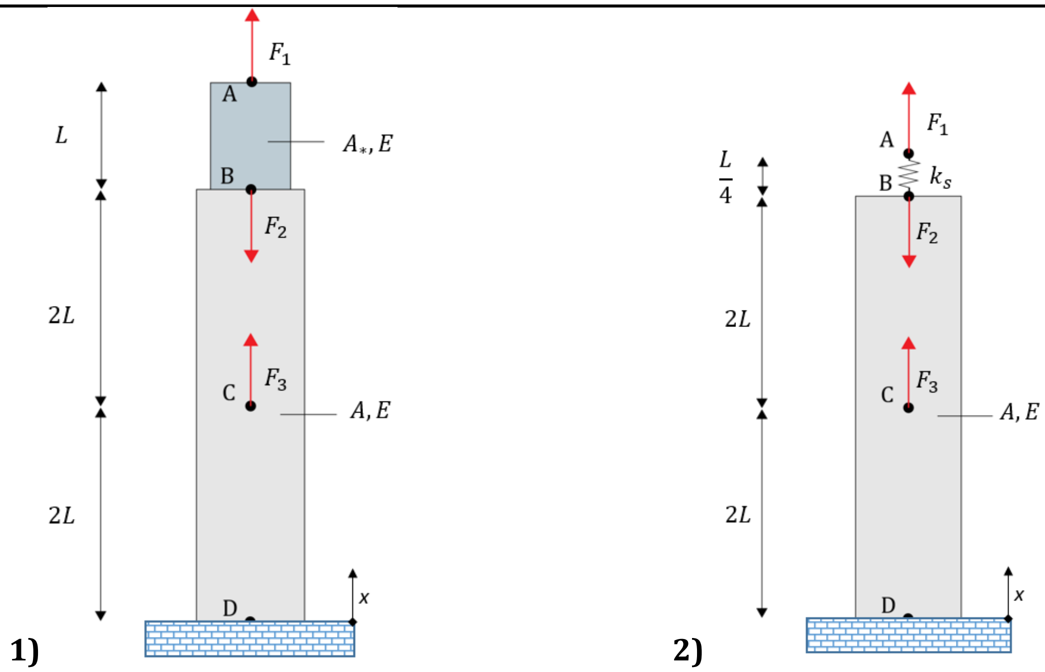

Figure 3b.4 | Composite posts: 1) bar/bar and 2) spring/bar

Exercise 3b.4 - Text in English

A system *1)* is composed of two different bars while a similar system *2)* is instead formed by a spring and a bar, as shown in the Figure 3b.4. Both systems are loaded with forces in A, B and C, and the materials are considered isotropic.

a) Draw the Free Body Diagram of the two systems.

Provided the numerical values for the systems:

1) $A = 3\ cm^2, A_* = 2\ cm^2, E = 25\ GPa, L = 10\ cm, F_1 = 30\ kN, F_2 = 45\ kN, F_3 = 75kN$

2) $A = 3\ cm^2, E = 25\ GPa, L = 10\ cm, F_1 = 30\ kN, F_2 = 45\ kN, F_3 = 75kN, k_s = 1 \cdot 10^8 \frac{kg}{s^2}$

b) Calculate the total deformation of the two different systems.

Exercise 3b.5 – Composite post

Une pièce est composée de deux éléments différents : un cube de hauteur 3L entre C et E (module de Young E_{CE}) et une pièce de hauteur 6L entre A et C (module de Young E_{AC}). Comme montré dans la figure 3b.5, la section varie de A (longueur de côté 2L) à C (longueur de côté 3L). Deux forces sont appliquées au système aux points A et C. L'amplitude de la force appliquée au point C est de 2F et l'amplitude de la force appliquée au point A est de F. Les matériaux utilisés sont considérés isotropes.

a) Dessiner le diagramme du corps libre du système et calculer la ou les force(s) de réaction.
b) Calculer la valeur de la contrainte et de la déformation relative de la pièce à la section D.
c) Calculer la valeur de la contrainte et de la déformation relative de la pièce à la section B.
d) Calculer la déformation du segment AC.

Mathematical Hint : $\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$

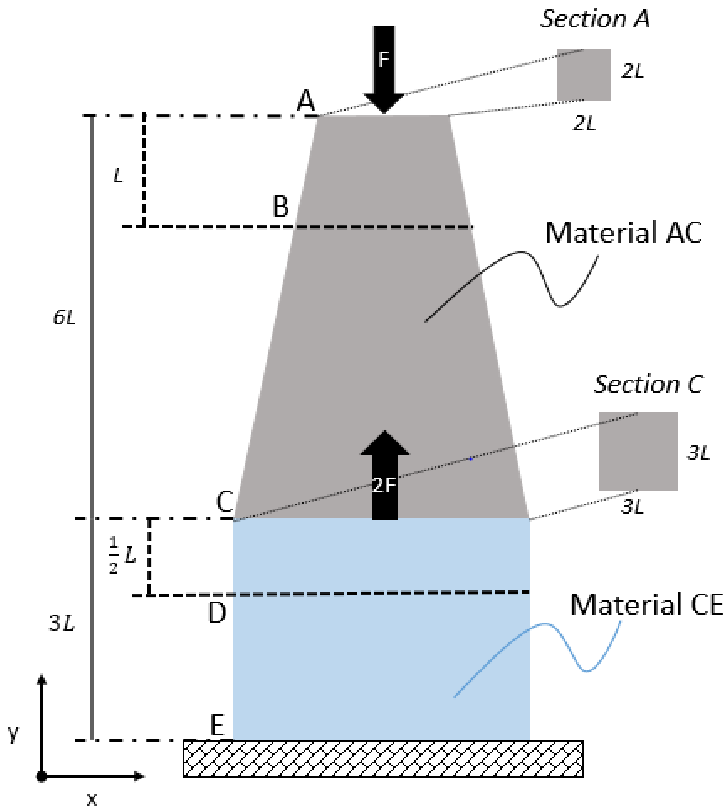

Figure 3b.5| Composite post

Exercise 3b.5 - Text in English

A post is composed of two different elements: a cube of height 3L between C and E (Young's modulus E_{CE}) and a square based tempered post of height 6L between A and C (Young's modulus E_{AC}). As shown in figure 3b.5, the section varies from A (side length 2L) to C (side length 3L) and two forces are applied to the system at point A and C. The amplitude of the force at point C is 2F and the amplitude of the force at point A is F. The materials are considered isotropic.

a) Draw the Free Body Diagram of the system and calculate the reaction force(s).
b) Calculate the value of the stress and strain of the post at section D.
c) Calculate the value of the stress and strain of the post at section B.
d) Calculate the deformation of the segment AC.

OPTIONAL - Exercise 3b.6 – Thermal strain and strain gauge

Une barre de silicium de longueur $L = 100\ \mu m$ a un coefficient de dilatation thermique $\alpha = -0.5\ (10^{-6}\ K^{-1})$. Une jauge de déformation est placée dessus. Le dispositif, illustré dans la figure 3b.6, est refroidi de 120 K à 60 K. La jauge se déforme en raison du changement de longueur de la barre de silicium.

Quelle est la longueur finale de la barre et la tension mesurée sur la jauge de déformation après refroidissement? Nous savons que la tension initiale mesurée à partir de la jauge est $V_0 = 2.00\ V$ et le facteur de la jauge (GF) est de 50.

$$GF = \frac{\Delta V}{V_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{V_{final} - V_0}{V_0} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

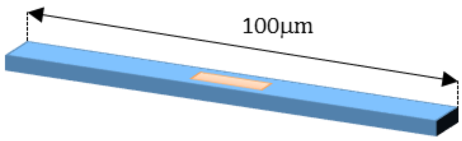

Figure 3b.6 | Strain gauge on silicon beam

Exercise 3b.6 - Text in English

A silicon beam of length $L = 100\ \mu m$ has a thermal expansion coefficient $\alpha = -0.5\ (10^{-6}\ K^{-1})$. A strain gauge is placed on it. The arrangement in Figure 3b.6 is cooled from 120 K to 60 K. The strain gauge is strained due to the change in length of the Silicon beam.

What is the final length of the beam and the measured voltage across the strain gauge after it is cooled? Given that the initial measured voltage from the stain gauge is $V_0 = 2.00\ V$ and the Gauge factor (GF) is 50.

OPTIONAL - Exercise 3b.7 – Strain and stress in a column with weight

Un plâtre médical imprimé en 3D est composé d'un matériau plus rigide à une extrémité qu'à l'autre, comme le montre la figure 3b.7. Pour créer un modèle simple à partir de cela, nous supposons que le contreventement est modélisé comme un tube creux avec une densité variable. La formule du changement de densité est donnée par :

$$\rho(x) = \rho_0 \left\{ \left(\frac{x - L}{L} \right)^2 + 1 \right\}$$

Où la constante ρ_0 a une valeur de 1.2 g/cm³ (1200 kg/m³). L'équation d'équilibre des forces est :

$$\frac{dN(x)}{dx} + B(x)A = 0$$

Où N(x) est la force interne, B(x) sont les forces par volume appliquées par mètre cube et A est la surface. Maintenant, nous voulons calculer le comportement du plâtre sous une contrainte de compression de F/A =100 [kPa]. Le plâtre a une longueur de 0,4 [m], E = 2,6 [GPa], v = 0,35, A = 0,002 [m2].

- **a) Trouver les expressions de la contrainte et de la déformation relative dans le tube creux. (*Astuce : utiliser le principe de substitution*)**
- **b) Calculer la valeur de la contrainte et de la déformation relative au milieu du tube (x=L/2)**
- **c) Donner le changement de volume relatif au milieu du tube**
- **d) Comparer le changement de volume sans l'effet de la gravité. De combien varie la contrainte en considérant le poids ?**

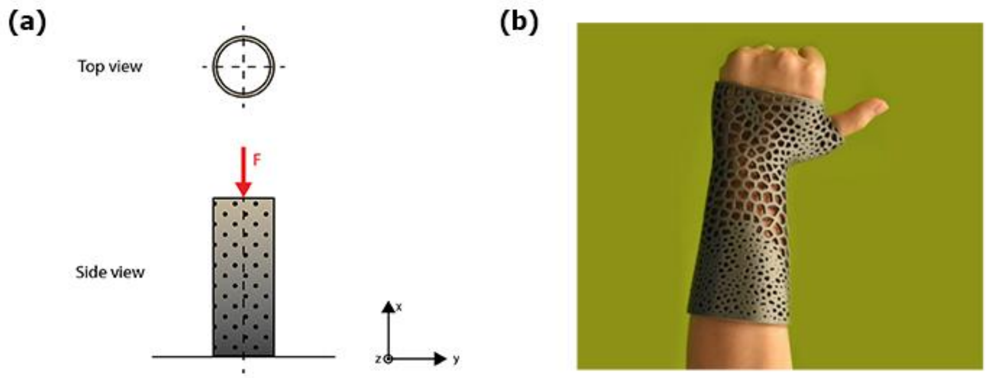

Figure 3b.7 | (a) Sketch of the problem with top and side view, **(b)** Photograph of the 3D printed brace

Exercise 3b.7 - Text in English

A 3D printed medical brace is composed out of material which is stiffer at one end than the other, as seen in Figure 3b.7. To create a simple model out of this we assume that the brace is modelled as a hollow tube with a varying density. The formula for the change in density is given as:

$$\rho(x) = \rho_0 \left\{ \left(\frac{x - L}{L} \right)^2 + 1 \right\}$$

Where the constant ρ_0 has a value of 1.2 g/cm³ (1200 kg/m³). The equilibrium equation of force per newton is given by

$$\frac{dN(x)}{dx} + B(x)A = 0$$

Where $N(x)$ is the internal force, $B(x)$ are the applied body forces per cubic meter, and A is the surface area. Now, we want to calculate the behaviour of the brace under a compressive stress of F/A =100 [kPa]. The brace has a length of 0.4 [m], E = 2.6 [GPa], v = 0.35, A = 0.002 [m^2].

a) Find the expression for stress and strain in the column (*Hint: use substitution*)
b) Calculate the stress and strain in the middle of the column (x=L/2)
c) Give the relative volume change in the middle of the column
d) Compare the change of volume without the effect of gravity. How much influence does taking the weight into account have on the strain?

